DS2 VERSION A
CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences.

Exercice 1 : 28 points.

1. **a.** 2 points.
   b. 2 points, 1 pour l'inversibilité, 1 pour l'inverse.
2. **a.** 3 points, 2 pour la résolution du système, 1 pour la conclusion sous forme de Vect().
   b. 1 points, il suffit de voir que les solutions du systèmes décrivent $E_1(A)$.
   c. 2 points, 1 pour la justification d'espace vectoriel, 1 pour les arguments qui montrent que la famille trouvée au **a.** est une base. Si la conclusion de la question **a.** n'est donnée qu'à ce moment-là, pas de pénalité.
3. **a.** 3 points, 2 pour la résolution du système, 1 pour la conclusion sous forme de Vect().
   b. 1 points, il suffit de voir que les solutions du systèmes décrivent $E_1(A)$.
   c. 2 points, 1 pour la justification d'espace vectoriel, 1 pour les arguments qui montrent que la famille trouvée au **a.** est une base. Si la conclusion de la question **a.** n'est donnée qu'à ce moment-là, pas de pénalité.
4. **a.** 3 points, 1 si la méthode du pivot semble maîtrisée mais s'il y a des erreurs de calculs.
   b. 2 points, il suffit de faire le calcul.
   c. 1 point, c'est une récurrence très simple.
5. **a.** 1 point.
   b. 2 points, 1 pour N^2, 1 point pour les N^k.
   c. 3 points, 1 pour la formule du binôme de Newton (0 si la commutativité n'est pas mentionnée), 1 pour vérifier la commutativité (il y a bien un calcul à faire ici, aucune des matrices n'est un multiple de l'identité), et 1 pour l'expression réduite de T^n.

Exercice 2 : 39 points. Barème officiel.

1. 1 point, 0 si l'inégalité des accroissements finis est évoquée, sauf pour expliciter un $K \in]0,1[$. On accepte la fonction de la question **6** à condition de donner la valeur de K.
2. 2 points, 1 pour la continuité en 1 point quelconque, 1 pour en déduire la continuité sur $\mathbb{R}$.
3. 2 points, dont un pour citer $K < 1$ au bon endroit.
4. **a.** 3 points, 1 pour l'initialisation, 2 pour l'hérédité, dont 1 pour signaler que $K > 0$ au moment où il faut.
   b. 5 points, 1 pour la convergence de $\sum_n K^n$, 1 pour l'argument de comparaison pour la convergence de $\sum_n |u_{n+1} - u_n|$, 1 pour en déduire la convergence simple, 1 pour le télescopage, 1 pour la conclusion.

Date: 4 Octobre 2024 14h00-18h00.
http://louismerlin.fr.

c. 1 point, c'est le théorème du point fixe, 0 point s'il manque des hypothèses, en particulier si la continuité n'est pas mentionnée.

5. **a.** 1 point, on accepte "croissance de la somme".

b. 4 points, 1 pour le calcul de $\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i$ (0 si $K \neq 1$ n'est pas dit ou même si $|K| < 1$ est cité à la place), 1 pour citer l'inégalité triangulaire, 1 pour simplifier $\sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i$, 1 pour finir (0 sur 3 si l'inégalité triangulaire est absente).

c. 2 points, donc un pour citer le résultat sur la limite d'une suite géométrique.

6. **a.** 3 points, 1 pour la classe $\mathcal{C}^2$ (on exige "dénominateur qui ne s'annule pas"), 1 pour chaque dérivée.

b. 3 points, 1 pour les variations de f', 1 pour $\frac{1}{4} \leqslant f'(t) \leqslant 0$ et 1 pour la valeur absolue.

c. 2 points, 1 pour penser à l'IAF, 1 pour conclure.

d. (i) 3 points, 1 pour la première ligne, 2 pour la 2ème, on enlève 1 point si oublie de `np`.

(ii) 6 points, 5 pour comprendre quelle est la condition d'arrêt dans la boucle fort et l'écrire dans le programme, 1 pour le `return`

Exercice 3 : 25 points. Partie I.

1. 2 points : 1 point pour la série géométrique, 1 pour la série géométrique dérivée.
2. 3 points, 1 pour citer la formule, 2 pour la preuve.
3. 2 point : 1 donné facilement, le reste pour avoir abouti.
4. 3 point, 1 pour l'initialisation, 2 pour l'hérédité.

Partie II.

1. 3 points, 2 pour avoir "reconnu" la loi géométrique, c'est une situation classique. Aucun point s'il manque des justifications ou s'il y a une erreur de langage. Puis 1 pour l'espérance.
2. 3 points, 1 pour une justification vague, 3 pour introduire les événements élémentaires et exprimer la probabilité avec la probabilité d'une intersection d'événements élémentaires.
3. 2 point : 1 pour la formule des probabilités totales, 1 point pour le calcul.
4. 2 point : 1 pour chaque cas $k \leqslant n$ et $k > n$.
5. 3 point **question difficile** : 1 pour les probabilités totales, 1 point pour le calcul, 1 pour utiliser la partie I à bon escient.
6. 2 point pour le calcul (1 si petite erreur).

Total : 92 points. Le total obtenu est divisé par 4 (et arrondi au 1/2 point supérieur pour faire une note sur 20 (il y a 23 points à prendre, ce qui est assez peu mais le sujet est court).

Commentaires généraux/erreurs fréquentes.

Rédaction / Stratégie.

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Correction détaillée.

Correction 1

[1]

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Calculer $(A-I)(A+I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Ensuite : $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

  Ainsi :
  $$(A-I)(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$
- On en déduit : $(A-I)(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $(A-I)(A+I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ □

b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A-I)(A+I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :
  $$(A-I)(A+I)^2 = (A-I)(A^2+2A+I) = A^3 + A^2 - A - I$$
- On en déduit :
  $$A^3 + A^2 - A - I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$
  $$\text{donc} \qquad A^3 + A^2 - A = I$$
  $$\text{et finalement} \qquad A(A^2 + A - I) = I$$
  On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $A^{-1} = A^2 + A - I$.

Remarque

- L'écriture $\frac{A}{9}$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe pas d'opérateur de division entre les matrices et les réels. Par contre, l'écriture $\frac{1}{9} \cdot A$ est bien autorisée : on multiplie une matrice par un scalaire à l'aide de l'opérateur de multiplication externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On ne peut pas non plus diviser par une matrice. Rappelons que l'inverse d'une matrice A, si elle existe, est notée A^{-1} et pas $\frac{1}{A}$. L'écriture $\frac{A}{B}$ est elle aussi impropre car il n'y a pas d'opérateur de division entre deux matrices.

□

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\}$.

1. Je ne suis pas l'auteur de cette correction, voir la page de Arnaud Jobin

a. Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -4\,x & - & 4\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ -2\,x & & & & & = & 0 \end{array} \right.$

Démonstration.

$$(S_1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -4\,x & - & 4\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ -2\,x & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & & y & = & z \end{array} \right.$$

□

b. Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} U \in E_1(A) & \Leftrightarrow & A\,U = U \\ & \Leftrightarrow & (A - I)\,U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -4\,x & - & 4\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ -2\,x & & & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & & y & = & z \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \text{ et } y = z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $E_1(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

□

c. En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_1(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.Donc l'ensemble $E_1(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:
  - engendre $E_1(A)$,
  - est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

  C'est donc une base de $E_1(A)$.Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel $E_1(A)$.

□

3. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = -U\}$.

a. Résoudre le système suivant : $(S_{-1}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -4\,x & - & 2\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ -2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
(S_{-1}) \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -4\,x & - & 2\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ -2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. \\
\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}}{\iff} \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff \quad & \left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

□

b. Déterminer $E_{-1}(A)$.

Démonstration.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) \quad & \Leftrightarrow \quad AU = -U \\
& \Leftrightarrow \quad (A + I)\,U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -4\,x & - & 2\,y & + & 4\,z & = & 0 \\ -2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

□

c. En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.
Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.Donc l'ensemble $E_{-1}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- La famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:
  - engendre $E_{-1}(A)$,
  - est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

  C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel $E_{-1}(A)$.

□

4. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On détaillera précisément les étapes de calcul.
Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftrightarrow L_3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi P est inversible. On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow -L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

Finalement : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque On remarque que la matrice P est constituée des vecteurs des famille $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. C'est ce choix qui va permettre d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ». □

b. Montrer que $P^{-1} A P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

Ainsi : $P^{-1}AP = T$. □

c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$
où $\mathcal{P}_n$: $A^n = PT^nP^{-1}$.

- **Initialisation**
  - D'une part : $A^0 = I$.
  - D'autre part : $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = P\ P^{-1} = I$.

  D'où $\mathcal{P}_0$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}_n$ et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (c'est-à-dire $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$).

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} \\ &= PT^n \left(P^{-1}\ P\right) TP^{-1} \\ &= PT^n\, I\, TP^{-1} \;=\; PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. □

5. a. Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. D'après l'énoncé, $N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

b. Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

En conclusion : $N^0 = I$, $N^1 = N$ et pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
Remarque :

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geq 2$:
$$N^k = N^{k-2} \times N^2 = N^{k-2} \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$
- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geq 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Démonstration.

- Soit $n \geq 1$.
  Les matrices D et N commutent. En effet :

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = ND$$

  On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 \\ &= D^n + n\, D^{n-1} N \end{aligned}$$

- Enfin : $D^0 + 0 \cdot D^{-1} N = I$ et $T^0 = I$.
  (la matrice D est bien inversible car c'est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls)
  La formule précédente reste donc valable pour $n = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = D^n + n\, D^{n-1} N$.

Remarque :

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la seconde somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geq 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

Correction 2

On trouve une correction de la totalité du sujet de l'EDHEC 2023 ici :`https://louismerlin.fr/Enseignement/Archives/EDHEC23cor.pdf`

Correction 3

Partie I.

1. Pour $k=0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0}=1$ de sorte que $s_0(x)$ s'écrit dans ce cas

$$s_0(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et on reconnaît la limite de la série géométrique (qui est bien convergente pour $x \in [0,1[$. Ainsi

$$s_0(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Pour $k=1$, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{1}=n$ de sorte que $s_1(x)$ s'écrit dans ce cas

$$s_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

et on reconnaît la série géométrique dérivée première (multipliée par x). Ainsi

$$s_1(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

2. C'est la formule de Pascal. Vérifions-là à l'aide de la définition des coefficients binomiaux. En effet, d'une part

$$\binom{n+1}{k+1}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!}.$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)}\right)\\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!)}
\end{aligned}$$

et la formule est démontrée.

3. On a

$$s_{k+1}(x)=\sum_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k+1}x^n$$

On fait le changement d'indice $m = n - 1$ de sorte que

$$\begin{aligned}
s_{k+1}(x) &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^{m+1} \\
&= x \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^m \\
&= x \cdot x^k + \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m+1}{k+1} x^m \\
&= x^{k+1} + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \right) x^m \\
&= x^{k+1} + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k} x^m + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m \\
&= x \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} x^m + x \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m \\
&= x s_k(x) + x s_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

4. On procède donc par récurrence sur k. Pour $k = 0$, la formule annoncée est compatible avec celle de la question **1.**. Supposons donc la propriété vraie pour un certain entier k. On a

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x),$$

c'est-à-dire

$$s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} s_k(x).$$

Mais, par hypothèse de récurrence,

$$s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Donc

$$s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} s_k(x) = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$$

et la formule est démontrée au rang $k+1$.

Partie II.

1. Montrons que N suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$. Pour cela, notons A_k l'événement "on obtient une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage dans la première série de tirages". Ainsi

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots A_{n-1} \cap \bar{A}_n)$$

Or les tirages sont indépendants de sorte que

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_{n-1}) \mathbb{P}(\bar{A}_n).$$

Puis , pour tout k, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{4}{5}$ (à chaque tirage, les 5 boules sont tirées avec équiprobabilité). Et donc $\mathbb{P}(\bar{A}_k) = \frac{1}{5}$. On conclut que

$$\mathbb{P}(N = n) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5}.$$

On sait que son espérance est égal à 5.

2. Notons B_k l'événement "on tire une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage dans la deuxième série de tirages". Alors

$$\mathbb{P}_{[N=n]}(X = 0) = \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \cdots \mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

3. L'ensemble des événements $(N = n)$ pour $n \geqslant 1$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{[N=n]}(X=0)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{25} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{16}{25}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{25} \frac{1}{1-\frac{16}{25}} \\
&= \frac{4}{25} \frac{1}{\frac{9}{25}} \\
&= \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

4. Conditionnellement à l'événement $(N = n)$, il est clair que X suit la loi binomiale de paramètre binomiale de paramètre n et $\frac{1}{5}$: on répète en effet n expériences indépendantes de probabilité de succès $\frac{1}{5}$. Ainsi, on a

- Si $k > n$, $\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = 0$.
- Si $k \leqslant n$, $\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$

5. Pour calculer la probabilité de $(X = k)$, on utilise le même système complet d'événements (et la même formule des probabilités totales) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) \cdot \mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) \cdot \mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} 4^{n-k} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{1}{5}\right)^{k-k} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{16}{25}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} s_k \left(\frac{16}{25}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} \frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(\frac{9}{25}\right)^{k+1}} \\
&= \frac{1}{4} \frac{25}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k \\
&= \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k
\end{aligned}$$

6. On cherche donc à montrer que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$$

converge et à préciser sa somme. Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k\\
&= \frac{25}{36}\cdot\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\
&= \frac{25}{81}\frac{1}{\left(\frac{5}{9}\right)^2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc X admet une espérance (on a bien montré que la série converge) et $E(X)=1$.